Листок 9. Действительные числа.

Определение. *Введем множество действительных чисел $\mathbb{R}$ следующим образом: на нем определены операции сложения (+) и умножения ($\cdot$), и кроме того выполнена*

Аксиома полноты. *Если A и B таковы, что $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing, \forall\, a \in A\ \ \forall\, b \in B\ \ a \leqslant b$, то существует $c : \forall\, a \in A\ \ \forall\, b \in B\ \ a \leqslant c \leqslant b$.*

1. Докажите, что аксиома полноты не выполнена для множества рациональных чисел.
Указание. Рассмотрите $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$, B — множество верхних граней A.

Определение. *Иррациональными числами называются действительные числа, не являющиеся рациональными.*

2. а) Может ли сумма рационального и иррационального числа быть рациональным числом?
б) Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом?
в) Может ли произведение рационального и иррационального числа быть рациональным числом?
г) Может ли произведение двух иррациональных чисел быть рациональным числом?
д) Может ли рациональное число в иррациональной степени быть рациональным числом?
е) Может ли иррациональное число в рациональной степени быть рациональным числом?
ё*) Может ли иррациональное число в иррациональной степени быть рациональным числом?

Определение. *Отрезком $[a;b]$ называется множество $\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$.*

Определение. *Интервалом $(a;b)$ называется множество $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.*

Определение. *Отрезок $[a;b]$ называется вложенным в отрезок $[c;d]$, если $[a;b] \subseteq [c;d]$.*

Принцип полноты Дедекинда. *Пусть A и B — непустые подмножества $\mathbb{R}$, $A \cup B = \mathbb{R}$, $A \cap B = \varnothing$ и $\forall\, a \in A\ \ \forall\, b \in B\ \ a < b$. Тогда или $\exists\, a' = \max A$, или $\exists\, b' = \min B$.*

Принцип полноты Вейерштрасса. *Любое непустое ограниченное сверху (снизу) множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Принцип полноты Кантора (принцип вложенных отрезков). *Любая последовательность вложенных отрезков имеет общую точку (число, входящее во все отрезки).*
Примечание. В последовательности вложенных отрезков $[a_n; b_n] \subseteq [a_{n-1}; b_{n-1}]$.

Аксиома Архимеда. $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ n \geqslant a$ *(множество натуральных чисел не ограничено сверху).*

3. Докажите, что из аксиомы полноты следует принцип полноты Дедекинда.

4. Докажите, что из принципа полноты Дедекинда следует принцип полноты Вейерштрасса.

5. Докажите, что из принципа полноты Вейерштрасса следует аксиома Архимеда.

6. Докажите, что из принципа полноты Вейерштрасса следует принцип полноты Кантора.

7*. Докажите, что из аксиомы Архимеда и принципа полноты Кантора следует аксиома полноты.

8. Докажите, что $\forall\, \delta > 0\ \ \exists\, n \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{n} < \delta$.

9. а) Докажите, что в любом интервале $(a;b) : b - a > 1$ существует целое число;
б) Докажите, что в любом интервале существует рациональное число;
в) Докажите, что в любом интервале существует иррациональное число.

Говорят, что длины отрезков $[a_n; b_n]$ стремятся к нулю, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N\ \ b_n - a_n < \varepsilon$.

10. а) Докажите, что последовательность вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю имеет ровно одну общую точку.
б) Всегда ли найдется общая точка у последовательности вложенных интервалов?

11*. Докажите, что если в арифметической прогрессии есть иррациональные числа, то их в ней бесконечно много.

12*. Докажите, что если в арифметической прогрессии есть иррациональные числа, то рациональных чисел в ней не больше одного.

13*. Докажите, что если в геометрической прогрессии есть иррациональные числа, то их в ней бесконечно много.

Сдать до 6 марта.