Как мало нужно для счастья,
если учесть, что горе — от ума.
А. Кнышев

Листок 8. Грани.

Определение. *Элемент a называется наибольшим (максимальным) элементом множества A, если $\forall\, b \in A\ a \geqslant b$ (обозначается $a = \max A$).*

Определение. *Если $\exists\, b : \forall\, a \in A\ a \leqslant b$, то такое b называется верхней гранью A. В этом случае говорят, что множество A ограничено сверху.*

1. Дайте при помощи кванторов определение:
а) наименьшего (минимального) элемента;
б) нижней грани.

2. Какие из следующих "определений" эквивалентны определению ограниченности множества A сверху: 1) $\exists\, a \in A\ \forall\, b\ a \leqslant b$ 2) $\forall\, a \in A\ \exists\, b\ a \leqslant b$ 3) $\forall\, a\ \exists\, b \in A\ a \geqslant b$ 4) $\exists\, a \in A\ \exists\, b\ a \leqslant b$
5) $\forall\, a \in A\ \forall\, b\ a \leqslant b$ 6) $\exists\, a \in A\ \forall\, b \in A\ a \geqslant b$ 7) $\forall\, a \in A\ \forall\, b \in A\ a \geqslant b$
Из каких из них следует ограниченность A сверху?

Определение. *Если A ограничено сверху и снизу, то говорят, что A — ограничено.*

3. Приведите пример множества
а) ограниченного;
б) ограниченного снизу, но не ограниченного сверху;
в) не ограниченного ни снизу, ни сверху.

Определение. *Наименьшая из верхних граней A (если она существует) называется точной верхней гранью A и обозначается $\sup A$ или $\sup\limits_{a\in A} a$ (точная нижняя грань обозначается $\inf A$ или $\inf\limits_{a\in A} a$).*

Определение. *a называется точной верхней гранью множества A, если a — верхняя грань A, а любое $a' < a$ — не верхняя грань A.*
Примечание. $\inf A$ читается "и́нфимум A", $\sup B$ читается "супре́мум B".

4. Запишите при помощи кванторов: а) $b = \min A$; б) A ограничено; в) A не ограничено;
г) b — нижняя грань A; д) A не ограничено сверху; е) A не имеет максимального элемента;
ё) $a = \sup B$; ж) $a = \inf B$; з) A не имеет точной верхней грани; и) $a \neq \inf B, a \neq \sup B$.

5. Докажите эквивалентность двух определений точной верхней грани.

6. а) Верно ли, что множество, имеющее максимальный элемент, имеет точную верхнюю грань?
б) Верно ли обратное?

7. Может ли множество иметь две точные верхние грани?

8. Исследуйте на ограниченность сверху и снизу, а также найдите $\inf M$ и $\sup M$ во множестве рациональных чисел (или докажите, что их не существует), если:
а) $M = \{-3, 0\}$; б) $M = \{x \in \mathbb{Q} : 2 \leqslant x \leqslant 11\}$; в) $M = \{x \in \mathbb{Q} : -4 < x < 7\}$;
г) $M = \mathbb{N}$; д) $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$; е) $M = \{x \in \mathbb{Q} : (x^2 - 2)(x^2 + 2x) \leqslant 0\}$;
ё) $M = A \setminus B$, где $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^4 - x^3 - x^2 \geqslant 0\}, B = \{x \in \mathbb{Q} : x^3 + 2x^2 - 5x - 6 > 0\}$.

9. Множества A и B имеют точные верхние грани. Верно ли, что C ограничено и имеет точную верхнюю грань? Верно ли, что если C имеет точную верхнюю грань, то A и B ограничены и имеют точные верхние грани, если:
а) $C = A \cap B$; б) $C = A \cup B$; в) $C = A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$;
г) $C = AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$; д) $C = A + (-A)$; е) $C = 2A$?

Сдать до 16 февраля.