16 января.

Первым номером будешь, скорей всего, ты. То есть некогда звонкий
кутила, разбойник и друг дорогой. А теперь - незнакомец брадатый.
М. Щербаков

Листок 7. Последовательности.

Обозначения. *При записи утверждений используют следующие сокращения (кванторы):*
$\forall$ — *читается "для любого" или "для всех" (for **A**ll);*
$\exists$ — *читается "существует" (**E**xist);*
$\exists!$ — *читается "существует единственное";*
: *или* | — *читается "такое, что".*
Например, запись $\forall\ x\ \exists\ y : y > x$ читается так: "для любого x существует y такой, что $y > x$".

Определение. ***Последовательностью*** *(обозначается $\{a_n\}$) называется упорядоченный бесконечный набор элементов $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, называемых **членами** последовательности.*
В дальнейшем все последовательности следует считать числовыми если явно не указано иное.
Последовательность можно задать одним из следующих способов:
1. Формулой общего члена, например: $a_n = n^2$;
2. Рекуррентной формулой: $a_n = a_{n-1} + 1$, $a_1 = 1$;
3. Описанием: a_n — мощность множества всех подмножеств n-элементного множества.

1. Дана последовательность $a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Найдите a_{91}, a_{2004}.

2. Дана последовательность $a_1 = 2, a_n = 3a_{n-1} + 1$. Докажите, что $a_n = \dfrac{5 \cdot 3^{n-1} - 1}{2}$.

3. Выведите рекуррентную формулу для последовательности $\{a_n\}$, если:
а) $a_n = 3n - 2$; б) $a_n = 2^n$; в) $a_n = n^2$; г) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.

4. Выведите формулу общего члена для последовательности, заданной рекуррентно:
а) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$; б) $a_1 = 2, a_n = \dfrac{n+2}{n}a_{n-1}$;
в) $a_1 = a, a_n = a_{n-1} + d$ (арифметическая прогрессия с первым членом a и разностью d);
г) $b_1 = b, b_n = b_{n-1}q, b \neq 0, q \neq 0$ (геометрическая прогрессия с первым членом b и знаменателем q).

5. Выведите формулу для суммы n первых членов
а) арифметической прогрессии; б) геометрической прогрессии;

6. Сумма n первых членов последовательности выражается формулой $S_n = 5n^2$. Докажите, что это арифметическая прогрессия, и найдите ее первый член и разность.

7. Могут ли в одной арифметической прогрессии встретиться числа $1, \sqrt{2}, 3$?

8. Могут ли в одной геометрической прогрессии встретиться числа а) 8, 12, 27; б) 1, 2, 5?

Определение. *Последовательность $\{a_n\}$ называется **нестрого возрастающей (убывающей)**, если $a_i \leqslant(\geqslant)\ a_{i+1}$. Если $a_i <(>)\ a_{i+1}$, то последовательность называется **строго возрастающей (убывающей)**. Возрастающая или убывающая последовательность называется **монотонной**.*

Определение. *Если $\exists c > 0 : \forall n \in \mathbb{N}\ |a_n| \leqslant c$, то последовательность называется ограниченной.*

9. а) Найдите необходимые и достаточные условия того, что геометрическая прогрессия ограничена.
б) Тот же вопрос для арифметической прогрессии.

10. Является ли последовательность $\{a_n\}, a_n = \dfrac{n!2^n}{n^n}$ возрастающей или убывающей?

11. Может ли последовательность быть одновременно а) ни возрастающей, ни убывающей;
б) нестрого возрастающей и нестрого убывающей; в) строго монотонной и ограниченной?

12. Исследуйте на монотонность и ограниченность: а) $a_n = n$; б) $a_n = (-1)^n$; в) $a_n = \dfrac{1}{n}$;
г) $a_n = n^{(-1)^n}$; д) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$; е) $a_1 = 10, a_n = 5 - \dfrac{4}{a_{n-1}}$; ё*) $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}^2}$;
ж) $a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$; з) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$; и) $a_n = 2^{-n}$; й*) $a_n = 2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{2}$.

Сдать до 30 января.