15 декабря.

Тем, кто хорошо знаком с пятым измерением,
ничего не стоит раздвинуть помещение до желаемых пределов
М. Булгаков

Листок 6. Рациональные числа.

Определение. ***Рациональным числом*** *будем называть всякое число, представимое в виде дроби* $\frac{m}{n}$*, где* $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$*. Такие представления рациональных чисел называются* ***рациональными дробями****. Множество рациональных чисел принято обозначать* $\mathbb{Q}$*.*

Определение. *Пусть* $p = \frac{a}{b}$*,* $q = \frac{c}{d}$*. Если* $ad = bc$*, то* $p = q$*, а такие рациональные дроби* $\frac{a}{b}$ *и* $\frac{c}{d}$ *называются* ***эквивалентными****.*

1. Докажите, что всякое рациональное число имеет бесконечно много представлений.

2. Являются ли следующие дроби эквивалентными:
а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{468}{702}$; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{1}$; в) $\frac{a}{b}$ и $\frac{2a}{2b}$; г) $\frac{1}{2}$ и $\frac{a}{2a}$?

3. а) Определите на множестве рациональных дробей операции сложения и умножения.
б) Покажите, что действия над эквивалентными дробями дают эквивалентные результаты.

4. Используя введенные операции вычислите:
а) $\frac{4}{6} + \frac{8}{9}$; б) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{6}$; в) $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$; г) $\frac{6}{11} \cdot \frac{44}{1}$.

5. Введите операцию деления, обратную операции умножения (это значит, что если $x = y : z$, то $x \cdot z = y$.)

Определение. *Рациональная дробь* $\frac{m}{n}$ *называется* ***несократимой****, если* НОД$(m, n) = 1$.

6! Докажите, что всякое рациональное число имеет единственное представление в виде несократимой дроби.
Примечание. Теперь можно считать, что $\mathbb{Q}$ — это просто множество несократимых рациональных дробей.

7. а) Докажите, что $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.
б) Покажите, что для целых чисел введенные вами сложение и умножение совпадают с обычными.

8. Докажите, что среди рациональных чисел нет числа, квадрат которого равен 2.

9. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $\sqrt{n}$ — либо натуральное число, либо не является рациональным.

10. Докажите, что:
а) $\sqrt{\frac{2}{3}} \notin \mathbb{Q}$; б) если $m, n \in \mathbb{Q}$, то $\sqrt{\frac{m}{n}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{mn} \in \mathbb{Q}$;
в) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$; г) если $m, n, \sqrt{m} + \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, то $\sqrt{m}, \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$;

Сдать до 29 декабря.