10 ноября.

Кто малого не может,
тому и большое невозможно.
М.В. Ломоносов

Листок 5. Алгоритм Евклида.

Определение. *Число d называется общим делителем чисел a и b, если $a \vdots d$ и $b \vdots d$. Наибольшее из таких чисел называется наибольшим общим делителем a и b и обозначается* НОД(a, b) *или* (a, b).
Примечание. Если $a = b = 0$, то любое число является общим делителем a и b, и НОД(a, b) не определен.

1. Найдите: а) НОД$(7923, 327)$; б) НОД$(1609, 424)$; в) НОД$(2342, 876)$.

Определение. *Числа a и b называются взаимно простыми, если* НОД$(a, b) = 1$.

2. докажите, что НОД$(a, b) =$ НОД$(a \pm b, b)$.

3! Алгоритм Евклида. Пусть $a > b > 0$, r — остаток от деления a и b.

а) Докажите, что НОД$(a, b) =$ НОД(b, r).

б) Рассмотрим преобразование $(a, b) \to (b, r)$. К полученной паре (b, r) можно применить его еще раз, и т.д. Докажите, что этот процесс закончится за конечное число шагов на паре (НОД$(a, b), 0)$. Данный способ нахождения НОД(a, b) называется *алгоритмом Евклида.*

4. Найдите (a, b), если: а) $a \vdots b$; б) a, b — простые; в) $|a - b| = 1$; г) $a = \frac{c}{(c, d)}$, $b = \frac{d}{(c, d)}$.

5. Три автомата могут выполнять такие преобразования: первый автомат пару чисел (m, n) преобразует в пару $(m + n, n)$, второй — в пару $(m - n, n)$, третий — в пару (n, m). Пусть в начале имеется пара чисел $(29, 93)$. Можно ли при помощи автоматов получить из нее пару а) $(8, 13)$; б) $(17, 51)$?

6! Используя алгоритм Евклида, докажите, что если НОД$(a, b) = d$, то:

а) существуют $x, y \in \mathbb{Z}$ такие, что $ax + by = d$; б) $\{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\} = \{kd : k \in \mathbb{Z}\}$.

7. Докажите, что при $(a, b) = 1$ среди чисел $a, a + b, a + 2b, \ldots, a + (n - 1)b$ обязательно найдется число, кратное n.

8. Найдите необходимые и достаточные условия того, что уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых числах. (Уравнения такого вида называются *диофантовыми уравнениями 1-го порядка.*)

9. Решите в целых числах: а) $13x + 8y = 4$; б) $9x - 6y = 12$; в) $15x + 5y = 3$.
Указание. Используйте предыдущую задачу.

10! Пусть $a > b > 0$, $a = q_1 b + r_1$ и $c = q_2 b + r_2$. Пусть уравнение $ax + by = c$ имеет решение (x_1, y_1).

а) Докажите, что в этом случае уравнение $bx + r_1 y = r_2$ тоже имеет некоторое целочисленное решение (x_2, y_2), причем $x_1 = y_2$, $y_1 = x_2 - q_1 y_2 + q_2$, $b > r_1 \geqslant 0$.

б) Предложите и обоснуйте способ нахождения целочисленных решений исходного уравнения.

11. Докажите, что если $ab \vdots m$ и a взаимно просто с m, то $b \vdots m$. Указание. Используйте задачу 6.

12. Докажите, что если $ab \vdots p$, то $a \vdots p$ или $b \vdots p$.

13*! Основная теорема арифметики. Докажите, что любое целое число можно разложить в произведение простых множителей единственным образом (с точность до перестановок множителей).

14*. Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $f(n)$ является составным.

15. Выпишите разложения на множители для чисел 18, 56, 125, 127, 1001.

16. У числа 91! посчитали сумму цифр, у получившегося числа снова посчитали сумму цифр, и т.д. до тех пор, пока не получили однозначное число. Какое?

Определение. НОК$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *(наименьшее общее кратное) — это наименьшее натуральное число n такое, что $n \vdots a_1, n \vdots a_2, \ldots, n \vdots a_k$.*

17. Пусть известны разложения чисел a и b на простые множители. Как найти их НОД и НОК.

18. Пусть $a > 0, b > 0$. Докажите, что НОД$(a, b) \cdot$ НОК$(a, b) = ab$.

19. Найдите НОК$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$.

Сдать до 1 декабря.