10 ноября.

Для начала займемся общей теорией четных простых чисел.
Фольклор.

Листок 4. Делимость и делители. Простые числа.

Примечание. В этом листочке все строчные латинские буквы обозначают целые числа.

1! Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что найдутся такие числа $q, r \in \mathbb{Z}$, что $m = nq + r$ и $0 \leqslant r < n$.

Определение. *Тогда q называется неполным частным, а r — остатком от деления m на n.*

Определение. *В случае, если $r = 0$, говорят что m делится на n, или m кратно n. Обозначение: $m \,\vdots\, n$.*

2. Найдите остатки от деления на 13 чисел: $39, -39, 90, -90, -1$.

3. Найдите все такие n, что остаток от деления 100 на n равен 6.

Определение. *Если из утверждения A следует утверждение B, то пишут $A \Rightarrow B$.*

4. Верно ли, что а) $a \,\vdots\, c, b \,\vdots\, c \Rightarrow (a \pm b) \,\vdots\, c$; б) $a \not\vdots\, c, b \not\vdots\, c \Rightarrow (a \pm b) \not\vdots\, c$; в) $a \not\vdots\, c, b \,\vdots\, c \Rightarrow (a \pm b) \not\vdots\, c$.

5. а) Докажите, что остаток суммы (разности) равен остатку суммы (разности) остатков.
б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для произведения.

6. Известно, что $a \,\vdots\, 30$ и $a \,\vdots\, 44$. Верно ли, что $a \,\vdots\, 33$? $a \,\vdots\, 24$?

7. Предложите и обоснуйте признаки делимости на а) 2, 5, 10; б) 3, 9; в) 4, 8; г) 11.

8. Найдите остаток от деления:
а) 8^{111} на 7; б) 11^{12} на 12; в) 4^{133} на 9; г) $10n^3 + 4n^2 + 7$ на n+1 для каждого n.

Определение. *Число $p \in \mathbb{N}, p > 1$ называется простым, если p делится только на 1 и на p. Число $n \in \mathbb{N}$ называется составным, если $n > 1$, и n не является простым.*
Примечание. Везде далее (в этом и последующих листочках) p — простое число (если не указано иное).

9. Найдите все p, такие, что будут простыми а) $p + 1$; б) $p + 8, p + 28$; в) $p^2 - 4$.

10. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 не является составным числом.

11. Докажите, что для любого n найдутся n идущих подряд составных чисел. Подсказка. Укажите их.

12! Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Сдать до 1 декабря.