17 октября 2008 года.

...Чтобы продать что-нибудь ненужное
надо сначала купить что-нибудь ненужное...
Э. Успенский

Листок 3. Математическая индукция.

Иногда приходится доказывать утверждения такого типа: "Для любого целого $n \geqslant p$ выполнено ...". Доказательство таких утверждений базируется на аксиоме индукции. Пусть для некоторого утверждения A доказаны две теоремы:

Теорема 1. *Утверждение A справедливо при* $n = p$.

Теорема 2. *Из того, что утверждение A верно при* $p \leqslant n \leqslant k$, *следует, что оно верно и при* $n = k + 1$.

Тогда в качестве аксиомы (она называется аксиомой индукции) принимается, что утверждение A верно для всех $n \geqslant p$ (n, p, k — целые числа). Метод доказательств, основанный на аксиоме индукции называется *методом математической индукции (ММИ).*

1. Докажите, что для любого натурального n:

а) $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; б) $S_n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

в) $S_n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

2. Докажите, что для любого натурального n:

а) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$; б) $n\,(2n^2 - 3n + 1) \,\vdots\, 6$; в) $7^{n+1} + 8^{2n-1} \,\vdots\, 19$;

г*) $11^{n+1} + 12^{2n-1} \,\vdots\, 133$; д*) $\underbrace{111\ldots1}_{243 \text{ единицы}} \,\vdots\, 243$; е*) $\underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{555\ldots5}_{n-1}6$ — полный квадрат.

3. Докажите неравенство: $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} < 2$. Указание. Воспользуйтесь тем, что $\dfrac{1}{(n-1)n} = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.

4. На плоскости провели несколько прямых. Докажите, что части, на которые рассечена плоскость, можно раскрасить в два цвета так, что соседние части (те, которые имеют оющий отрезок прямой) были раскрашены в разные цвета.

5. Докажите, что через n точек, не все из которых лежат на одной прямой, можно провести хотя бы n прямых.

6. а) На плоскости проведено n прямых, причем каждые две пересекаются, и никакие три не проходят через одну точку. Найдите число частей, на которые они разбивают плоскость.

б) На плоскости проведено n окружностей, причем любые две пересекаются в двух точках, и никакие три не проходят через одну точку. Найдите число частей, на которые они разбивают плоскость.

7. В компании из $k \geqslant 4$ человек каждый знает новость, которая больше никому неизвестна. За один телефонный разговор двое могут сообщить друг другу все известные им новости. Докажите, что достаточно $2k - 4$ разговора, чтобы каждый человек узнал все новости.

8. Пусть $x + \dfrac{1}{x}$ — целое. Докажите, что $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ — тоже целое.

9! Докажите **Неравенство Бернулли:** $(1 + x)^n \geqslant 1 + xn$, где $x \geqslant -1$, $n \in \mathbb{N}$.
Примечание. Эта задача является обязательной.

10. а) Докажите, что $2^k > k$ при любом $k \in \mathbb{N}$;

б*) Докажите, что $2^k > k^n$ при любом $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant N$ (N зависит от n);
Указание. Попробуйте найти N.

в*) Докажите, что $\alpha^k > k^n$ при любом $\alpha > 1$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant N$ (N зависит от n).

11*. Докажите, что при любом натуральном $n \geqslant 6$ справедливо неравенство $2^n n! < n^n$.

12. Догадайтесь, чему равны следующие суммы и докажите правильность своей догадки :)

а) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$; б) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n$; в) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2$;

г) $1+3+9+\ldots+3^n$; д) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{15} + \ldots + \dfrac{1}{n^2 - 1}$; е) $2^n + 2^{n-1}\cdot 3 + 2^{n-2}\cdot 3^2 + \ldots + 2\cdot 3^{n-1} + 3^n$.

Сдать до 27 октября.