22 сентября 2008 года.

Если у вас нету дома,
Пожары ему не страшны...

Листок 2. Множества.

Множество — это совокупность, набор элементов.
Обозначения. Множества обозначают большими латинскими буквами: A, B, C, $\ldots Z$. Элементы множеств обозначаются маленькими латинскими буквами: a, b, c, $\ldots z$. Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут $a \in A$, если a не принадлежит A, пишут $a \notin A$.
Множества задаются:
1) Перечислением: $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $X =${а, б, … я};
2) Свойствами: $X = \{x : x^2 < 5\}$, $X = \{x \mid x^2 < 5\}$ (читается: x, такие что $x^2 < 5$)

Определение. *Пустым множеством называется множество, не содержащее ни одного элемента.*
Обозначения. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\varnothing$ — пустое множество.

Определение. *Множество A является подмножеством множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Пишут: $A \subseteq B$. (В частности $A \subseteq A$, $\varnothing \subseteq A$.)*

1. Верно ли, что:
а) $2 \in \{x : 91x^4 - 2004x - 1 = 0\}$; б) $-33 \in \left\{x : \dfrac{x^3-1}{x^2+2} < 2\right\}$; в) $3 \in \left\{\dfrac{7n-2}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$;
г) $1,5 \in \left\{\dfrac{n}{n^3+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$; д) $41 \in \{x^2 + y^2 : x, y \in \mathbb{Z}\}$; е*) $0 \in \{2m^4 - n^4 + 2 : m, n \in \mathbb{N}\}$?

2. Пусть $A = \{x : |x - 2| < 3\}$, $B = \{x : |x - 1| < c\}$. При каких c: а) $A \subseteq B$; б) $B \subseteq A$?

Определение. *Множество A равно множеству B, если $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$. В этом случае пишут $A = B$.*

Определение. *Множество $A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$ называется пересечением, множество $A \cup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$ — объединением, множество $A \setminus B = \{x : x \in A$ и $x \notin B\}$ — разностью, множество $A \Delta B = \{x :$ или $x \in A$ или $x \in B$, но не A и B одновременно$\}$ — симметрической разностью множеств A и B.*

Определение. *Множество A называют конечным, если оно содержит лишь конечное число элементов. В противном случае множество A — бесконечно. Мощность конечного множества A (обозначается $\#A$ или $|A|$) — это число элементов A.*

3. Найдите $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, если $A = \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$, $B = \{4, 7, 10, 13\}$.

4. Верно ли, что $A = B$, где а) $A = \left\{x : \sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{24}\right\}$, $B = \left\{x : \sqrt{x}\sqrt{x+2} = \sqrt{24}\right\}$;
б*) $A = \{x^2 - y^2 : x, y \in \mathbb{Z}\}$, $B = \mathbb{Z} \setminus \{4n - 2 : n \in \mathbb{Z}\}$?

5. Докажите:
а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$; б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$; в) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
г) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; д) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; е) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
ё) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$; ж) $(A \cap B) \Delta C = (A \Delta C) \cap (B \Delta C)$; з) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

Обозначение. $m \vdots n$ означает, что m делится на n, $m \not\vdots\, n$ означает, что m не делится на n.

6. а) Найдите $A \cap B$, если $A = \{6n : n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$;
б) Найдите $A \cup B$, если $A = \{2n : n \in \mathbb{Z}, n \not\vdots\, 9\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{Z}, n \not\vdots\, 15\}$;
в) Найдите $A \setminus B$, если $A = \left\{x : \dfrac{x-3}{2x^2+x+1} > 0\right\}$, $B = \{x : x^3 + x + 1 \leqslant 0\}$.

7. Докажите: $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

8. Конечны или бесконечны следующие множества:
а) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = m^2 + k^2, m, k \in \mathbb{N}\}$; б) $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = m^2 + k^2, m, k \in \mathbb{N}, k < 6\}$?

9. Мощность множества A равна 5. Найдите мощность:
а) множества всех подмножеств множества A;
б) множества всех подмножеств множества A, состоящих из трех элементов.

10*. Найдите мощность множества из пункта б) 8-й задачи.

Сдать до 6 октября.