

**Листок 2. Множества.**

*Множество — это совокупность, набор элементов.*

Обозначения. Множества обозначают большими латинскими буквами:  $A, B, C, \dots, Z$ . Элементы множеств обозначаются маленькими латинскими буквами:  $a, b, c, \dots, z$ . Если элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$ , то пишут  $a \in A$ , если  $a$  не принадлежит  $A$ , пишут  $a \notin A$ .

Множества задаются:

- 1) Перечислением:  $X = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $X = \{a, b, \dots, я\}$ ;  
2) Свойствами:  $X = \{x : x^2 < 5\}$ ,  $X = \{x \mid x^2 < 5\}$  (читается:  $x$ , такие что  $x^2 < 5$ )

**Определение.** *Пустым множеством называется множество, не содержащее ни одного элемента.*

Обозначения.  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  — множество натуральных чисел,  $\mathbb{Z}$  — множество целых чисел,  $\emptyset$  — пустое множество.

**Определение.** *Множество  $A$  является подмножеством множества  $B$ , если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ . Пишут:  $A \subseteq B$ . ( $B$  частности  $A \subseteq A$ ,  $\emptyset \subseteq A$ .)*

1. Верно ли, что:

- а)  $2 \in \{x : 91x^4 - 2004x - 1 = 0\}$ ;      б)  $-33 \in \left\{x : \frac{x^3 - 1}{x^2 + 2} < 2\right\}$ ;      в)  $3 \in \left\{\frac{7n - 2}{2n + 1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ;  
г)  $1, 5 \in \left\{\frac{n}{n^3 + 1} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ;      д)  $41 \in \{x^2 + y^2 : x, y \in \mathbb{Z}\}$ ;      е\*)  $0 \in \{2m^4 - n^4 + 2 : m, n \in \mathbb{N}\}$ ?

2. Пусть  $A = \{x : |x - 2| < 3\}$ ,  $B = \{x : |x - 1| < c\}$ . При каких  $c$ : а)  $A \subseteq B$ ;      б)  $B \subseteq A$ ?

**Определение.** *Множество  $A$  равно множеству  $B$ , если  $B \subseteq A$  и  $A \subseteq B$ . В этом случае пишут  $A = B$ .*

**Определение.** *Множество  $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$  называется пересечением, множество  $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$  — объединением, множество  $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$  — разностью, множество  $A \Delta B = \{x : \text{или } x \in A \text{ или } x \in B, \text{ но не } A \text{ и } B \text{ одновременно}\}$  — симметрической разностью множеств  $A$  и  $B$ .*

**Определение.** *Множество  $A$  называют конечным, если оно содержит лишь конечное число элементов. В противном случае множество  $A$  — бесконечно. Мощность конечного множества  $A$  (обозначается  $\#A$  или  $|A|$ ) — это число элементов  $A$ .*

3. Найдите  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $A \Delta B$ , если  $A = \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ ,  $B = \{4, 7, 10, 13\}$ .

4. Верно ли, что  $A = B$ , где а)  $A = \left\{x : \sqrt{x^2 + 2x} = \sqrt{24}\right\}$ ,  $B = \left\{x : \sqrt{x}\sqrt{x+2} = \sqrt{24}\right\}$ ;  
б\*)  $A = \{x^2 - y^2 : x, y \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \mathbb{Z} \setminus \{4n - 2 : n \in \mathbb{Z}\}$ ?

5. Докажите:

- а)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ;      б)  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \cap (A \setminus B)$ ;      в)  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ;  
г)  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ;      д)  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus C) \cup (A \setminus B)$ ;      е)  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ;  
ё)  $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$ ;      ж)  $(A \cap B) \Delta C = (A \Delta C) \cap (B \Delta C)$ ;      з)  $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ .

Обозначение.  $m : n$  означает, что  $m$  делится на  $n$ ,  $m \not\div n$  означает, что  $m$  не делится на  $n$ .

6. а) Найдите  $A \cap B$ , если  $A = \{6n : n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B = \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$ ;

б) Найдите  $A \cup B$ , если  $A = \{2n : n \in \mathbb{Z}, n \not\div 9\}$ ,  $B = \{3n : n \in \mathbb{Z}, n \not\div 15\}$ ;

в) Найдите  $A \setminus B$ , если  $A = \left\{x : \frac{x - 3}{2x^2 + x + 1} > 0\right\}$ ,  $B = \{x : x^3 + x + 1 \leq 0\}$ .

7. Докажите:  $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$ .

8. Конечны или бесконечны следующие множества:

- а)  $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = m^2 + k^2, m, k \in \mathbb{N}\}$ ;      б)  $\{n \in \mathbb{N} : n^2 = m^2 + k^2, m, k \in \mathbb{N}, k < 6\}$ ?

9. Мощность множества  $A$  равна 5. Найдите мощность:

а) множества всех подмножеств множества  $A$ ;

б) множества всех подмножеств множества  $A$ , состоящих из трех элементов.

10\*. Найдите мощность множества из пункта б) 8-й задачи.