3 апреля.

Не стоит путать причину и следствие.
Особенно не стоит путать следствие.
А. Кнышев

Листок 11. Арифметика пределов.

1. Докажите, что если $\{a_n\}, \{b_n\}$ — бесконечно малые, $\{c_n\}$ — ограниченная, то
а) $\{a_n + b_n\}$, б) $\{a_n c_n\}$, в) $\{a_n b_n\}$ — бесконечно малые.

2. а) $\forall\, n\ \ a_n \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \neq 0$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{A}$.

б) Что можно сказать о $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$, если $A = 0$?

3. (Арифметика пределов)! Докажите:
а) $\forall\, c \lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

4. Докажите, что сходящаяся последовательность есть сумма постоянной и бесконечно малой.

5. Докажите **Теорему о двух милиционерах:**
Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ и $\exists\, N\ \forall\, n > N a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, то $\{b_n\}$ — сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

6. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\forall\, n\ \ |b_n| \leqslant |a_n|$, то $\{b_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

7. С помощью теоремы о двух милиционерах найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n!}{2\sqrt[3]{n}+1}$

8. Верно ли, что одна из последовательностей $\{a_n\}, \{b_n\}$ бесконечно малая, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$?

9. Найдите пределы: а) $\dfrac{(n-5)^2(3n+2)^3}{(2n-11)^5}$; б) $\dfrac{\sqrt{n-1}-2}{\sqrt{n+5}+5}$; в) $\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$;

г) $\cos\dfrac{1}{n}$; д) $1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}$; е) $\dfrac{n^2}{2^n}$; ё) $\{(2+\sqrt{3})^n\}$ ($\{a\}$ — дробная часть a)

Указание. Докажите, что последовательность $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ задается формулой $a_0 = 2, a_1 = 4, a_n = 4a_{n-1}-a_{n-2}$.

10! Докажите **Теорему Вейерштрасса:** Ограниченная монотонная последовательность сходится.

11. Докажите, что последовательность имеет предел и найдите его:
а) $a_1 = 10, a_n = 5 - \dfrac{4}{a_{n-1}}$; б) $a_1 = 0, a_n = \dfrac{25}{10-a_{n-1}}$; в) $a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$.

12*. Докажите, что последовательность $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ имеет предел.

Указание. Докажите, что последовательность возрастает и ограничена сверху.

Предел этой последовательности обозначают e, он равен 2,718281828459045...

Определение. *Последовательность $\{a_n\}$ называется фундаментальной, или последовательностью Коши, если $\forall\, \varepsilon\ \exists\, N : \forall\, m, n > N\ |a_m - a_n| < \varepsilon$.*

13. Докажите, что любая фундаментальная последовательность ограничена.

14! Докажите **критерий Коши:**
а) Если последовательность фундаментальна, то она имеет предел.
Указание. Придется использовать аксиому полноты или одно из эквивалентных ей утверждений.
б) Если последовательность имеет предел, то она фундаментальна.

15. Исследуйте на сходимость с помощью критерия Коши:
а) $a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$. б) $a_n = \dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\ldots+\dfrac{\sin n}{2^n}$.

16*. Крокодил Гена знает четыре арифметических действия и умеет находить предел. Помогите ему вычислить $\sqrt{a}$.

17*. Теперь помогите ему найти $\sqrt[n]{a}$.

Сдать до 24 апреля.