3 апреля.

Если ничто другое не помогает,
прочтите, наконец, инструкцию.
А. Кнышев

Листок 10. Предел последовательности.

Определение. *Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}$ (обозначается $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$), если $\forall\ \delta > 0\ \exists\ N\ \forall\ n > N\ |a_n - A| < \delta$. В этом случае говорят, что последовательность $\{a_n\}$ сходится (стремится) к A ($a_n \longrightarrow A$, $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$). В случае, если такого A не существует, говорят, что последовательность расходится.*

Определение. *Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если $\forall\ C > 0\ \exists\ N\ \forall\ n > N\ \ |a_n| > C$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (и говорят, что последовательность расходится к бесконечности).*

1! Может ли последовательность иметь более одного предела?

2. Докажите, что следующие последовательности бесконечно малы:
а) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$; б) $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots$; в) $0, 0, 0, \ldots$; г) $a_n = \dfrac{n+100}{n^2}$.

3. Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что $\forall\ n\ \ a_n \neq 0$. Докажите, что:
а) если a_n — бесконечно малая последовательность, то $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ — бесконечно большая.
б) если a_n — бесконечно большая последовательность, то $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ — бесконечно малая.

4. Докажите: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$; г*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

5. Докажите, что последовательность, имеющая предел, ограничена. Верно ли обратное?

6. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

7. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+m}$ или обе последовательности одновременно расходятся.

8. Докажите: а) $\exists\ N\ \forall\ n > N\ a_n \geqslant 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant 0$; б) $\exists\ N\ \forall\ n > N\ a_n \geqslant b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
в) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow \exists\ N\ \forall\ n > N\ a_n > b_n$; г) $\forall\ c \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_n\ \exists\ \varepsilon > 0\ \exists\ N\ \forall\ n > N\ |a_n - c| > \varepsilon$;
д) Верно ли, что $\exists\ N\ \forall\ n > N\ a_n > b_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$?

9. Найдите пределы последовательностей:
а) $\dfrac{n-1}{n+4}$; б) $\dfrac{n^2+20n+900}{4n^2-79}$; в) $\sqrt{n^2+1} - n$; г) $\dfrac{2\cos n - 3\sin n}{n}$; д) $n^2 + \sin n$;

Сдать до 17 апреля.