Листок 14. Подпоследовательности.

Определение. *Пусть имеется последовательность a_n. Рассмотрим строго возрастающую бесконечную последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Последовательность $\{b_k = a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$.*

1. Докажите, что если последовательность имеет предел, то любая её подпоследовательность имеет предел.

2. Правда ли, что:
а) последовательность имеет предел, если какая-то её подпоследовательность имеет предел;
б) любая её подпоследовательность имеет предел;
в) Бесконечное число её подпоследовательностей имеют предел?

Определение. *Расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$ называется множество $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*
$B'_\delta(-\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{1}{\delta}\}$; $\quad B'_\delta(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{\delta}\}$;
$B_\delta(-\infty) = B'_\delta(-\infty) \cup \{-\infty\}$; $\quad B_\delta(+\infty) = B'_\delta(+\infty) \cup \{+\infty\}$.

Определение. *Пределом последовательности a_n на $\overline{\mathbb{R}}$ будем называть такое $A \in \overline{\mathbb{R}}$, что $\forall\ \delta > 0$ $\exists\ N : \forall\ n \geqslant N, n \in \mathbb{N}\ \ a_n \in B_\delta(A)$.*

3! Проверьте, что данное определение совпадает с ранее введенным в случае $A \in \mathbb{R}$.

Определение. *Точка $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется предельной точкой последовательности a_n, если в любой её окрестности содержится бесконечно много членов последовательности.*

Определение. *Точка $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется частичным пределом последовательности a_n, если найдется такая подпоследовательность a_{n_k}, что A является пределом a_{n_k}.*

4! Чем отличается частичный предел от предельной точки?

5. Найдите все частичные пределы:
а) a_n — количество делителей числа n; б) a_n — сумма цифр в десятичной записи числа n;
в) a_n — остаток от деления n^2 на 16; г) a_n — остаток от деления n^3 на 13;

6! а) **Теорема Вейерштрасса.** Любая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку (на $\mathbb{R}$).
б) **Теорема Больцано-Вейерштрасса.** Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся (на $\mathbb{R}$) подпоследовательность.
Примечание. Если в условиях задачи заменить $\mathbb{R}$ на $\overline{\mathbb{R}}$, то условие ограниченности можно отбросить.

7! а) Последовательность сходится на $\overline{\mathbb{R}}$ $\Leftrightarrow$ существует единственная предельная точка на $\overline{\mathbb{R}}$.
б) Последовательность сходится на $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ существует единственная предельная точка на $\mathbb{R}$.
в) Верно ли обратное?

8. Существует ли такая последовательность, что множеством её частичных пределов является:
а) $\{a; b\}$; б) $\mathbb{N}$; в) $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$; г) $\overline{\mathbb{Q}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{Q} \cup \{+\infty\}$; д*) $\overline{\mathbb{R}}$.

9! Докажите, что множество частичных пределов последовательности имеет максимальный и минимальный элемент.

Определение. *Верхним пределом называется наибольший из частичных пределов последовательности (обозначается $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$), нижним пределом называется наименьший из частичных пределов последовательности (обозначается $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$).*

10! $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

11. Найдите множество частичных пределов, а также верхний и нижний предел:
а) $a_n = \dfrac{1}{n}$; б) $a_n = 1 + (-1)^n$; в) $a_n = (2 + (-1)^n)^n$; г) $a_n = -\left[\dfrac{n^2+21}{n-0,5}\right]$;
д) $a_n = \{\sqrt{n}\}$; е) $a_n = \{\alpha n\}, \alpha \in \mathbb{Q}$; ё*) $a_n = \{\pi n\}$; ж*) $a_n = \sin n$; з*) $a_n = \operatorname{tg} n$.