20 октября.

Учитывая глупость большинства людей,
широко распространенная точка зрения
будет скорее глупа, чем разумна.
Б. Рассел

Листок 13. Множества на числовой прямой.

В данном листочке все множества будут рассматриваться как подмножества числовой прямой $\mathbb{R}$.

Определение. *Внутренней точкой множества M будем называть такой элемент $m \in \mathbb{R}$, что найдется некоторая его δ-окрестность, целиком лежащая в M.*

Определение. *Граничной точкой множества M будем называть такой элемент $m \in \mathbb{R}$, что в любой δ-окрестности m найдутся точки, как принадлежащие M, так и не принадлежащие M.*

Определение. *Предельной точкой множества M будем называть такой элемент $m \in \mathbb{R}$, что в любой δ-окрестности m найдется бесконечно много точек, принадлежащих M.*

Определение. *Изолированной точкой множества M будем называть такой элемент $m \in M$, что в некоторой его проколотой δ-окрестности не содержится точек, принадлежащих M.*

1. Найдите все внутренние, граничные, предельные и изолированные точки множества:

а) $\mathbb{N}$; б) $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$; в) $\mathbb{Q}$; г) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; д) $[0;1]$; е) $(0;1)$; ё) $\varnothing$.

2. Каким определениям эквивалентны следующие утверждения:

а) в любой δ-окрестности точки m найдется точка множества M;
б) в любой проколотой δ-окрестности точки m найдется точка множества M;
в) в любой δ-окрестности точки m найдется по крайней мере две разных точки множества M;
г) в любой δ-окрестности точки m не найдется ни одной точки множества M.

Определение. *Множество M называется открытым, если все его точки — внутренние. Множество M называется замкнутым, если его дополнение $\mathbb{R} \setminus M$ — открытое.*

3. Докажите, что множество замкнуто, если и только если оно содержит все свои предельные точки.

4. Какие из следующих множеств открытые, какие замкнутые:

1) $[0;1]$; 2) $[0;1)$; 3) $(0;1)$; 4) $\{0;1\}$; 5) $\mathbb{Q}$; 6) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; 7) $\mathbb{R}$; 8) $\varnothing$?

5! Будет ли открытым множеством:

а) объединение конечного числа открытых множеств;
б) пересечение конечного числа открытых множеств;
в) объединение любого числа открытых множеств;
г) пересечение любого числа открытых множеств.
д) Сформулируйте и проверьте аналогичные утверждения про замкнутые множества.

6. Докажите, что точка x_0 является предельной точкой множества M тогда и только тогда, когда найдется последовательность x_n точек множества M, не совпадающих с x_0 такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

7. Докажите, что любое ограниченное бесконечное множество имеет хотя бы одну предельную точку.

Определение. *Множество M называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами ($\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \supseteq M$) можно выбрать конечное подпокрытие (т.е. найдутся такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_{\lambda_k} \supseteq M$).*

8. Являются ли компактными множества:

а) $\{0;1\}$ б) $[0;1]$; в) $(0;1)$; г) $[0;1)$; д) $[0;+\infty)$;

9*. Докажите **Теорему Лебега**: Замкнутое ограниченное множество компактно.

Сдать до 30 октября.