Листок 12. Ряды.

Определение. *Сумма* $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ *называется* ***конечным числовым рядом.***

Определение. *Сумма* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ *называется* ***бесконечным числовым рядом.***

Определение. *Число* $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ *называется n-й* ***частичной суммой*** *ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение. *Если последовательность частичных сумм* $\{S_n\}$ *имеет предел* S, *говорят, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***сходится*** *и* S *— его сумма (пишут* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$*). Иначе говорят, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

1! Критерий Коши сходимости ряда. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ фундаментальна. Запишите в кванторах и докажите.

2. а) Докажите, что если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

б) Верно ли обратное?

3. Исследуйте на сходимость ряды: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \cdot (\cos 91^\circ)^n$.

4! Необходимое условие сходимости. Докажите, что если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

5. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{28282828n^2 + 91\cos(n^{57})}$.

6. Пусть все $a_n > 0$. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ ограничена.

7. Пусть $\forall\, n\ a_n \geqslant b_n > 0$. Докажите, что из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

8. $\{a_n\}$ — монотонная бесконечно малая последовательность. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ сходится.

Указание. Рассмотрите последовательности S_{2n} и S_{2n-1}, используйте теорему Вейерштрасса.

9! Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$. A и B — действительные числа. Докажите, что:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n$ сходится и его сумма равна $A \pm B$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ сходится и его сумма равна $c \cdot A$.

в) Верно ли, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится? г) Верно ли, что сходится $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$?

10. Исследуйте на сходимость: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+b^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$.

11. Исследуйте следующие ряды на сходимость и в случае сходимости найдите их суммы:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+1}{(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$.

12*. Исследуйте ряд на сходимость и найдите его сумму: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Напомним, что $0! = 1$.

Указание 1. Используя бином Ньютона представьте $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ в виде $1 + \frac{1}{1!}(\ldots) + \frac{1}{2!}(\ldots) + \ldots + \frac{1}{n!}(\ldots)$.

Указание 2. Попробуйте найти предел $(\ldots)$ при $n \to \infty$.