3 сентября.

Всего две вещи действительно бесконечны:
вселенная и человеческая глупость.
Впрочем, насчет вселенной я не уверен.
А. Эйнштейн

Листок 11-bis. Общая теория четных простых чисел.

Определение. *Напомним, что* ***пределом*** *последовательности* $\{a_n\}$ *называется такое число* A, *что* $\forall\ \delta\ \exists\ N : \forall\ n > N |A - a_n| < \delta$.

Определение. *Напомним, что последовательность* $\{a_n\}$ *называется* ***бесконечно малой****, если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

1. Вспомните, какие последовательности называются сходящимися. Сходятся ли последовательности $a_n = n$, $a_n = \dfrac{1}{n}$, $a_n = (-1)^n$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$? Есть ли среди них бесконечно малые?

2. Докажите, что сходящаяся последовательность есть сумма постоянной и бесконечно малой.

3. (Арифметика пределов)! Докажите:
а) $\forall\ c \lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

4. Докажите **Теорему о двух милиционерах:**
Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ и $\exists\ N\ \forall\ n > N a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, то $\{b_n\}$ — сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

5. С помощью теоремы о двух милиционерах найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n!}{2\sqrt[3]{n}+1}$

6. Найдите пределы: а) $\dfrac{(n-3)^2(2n+1)^3}{(n-488)^5}$; б) $\dfrac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n-1}+1}$; в) $\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+2}+3^{n+2}}$;
г) $\cos\dfrac{1}{n}$; д) $1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}$; е) $\dfrac{n^2}{2^n}$; ё) $\{(2+\sqrt{3})^n\}$ ($\{a\}$ — дробная часть a)

Указание. Докажите, что последовательность $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ задается формулой $a_0 = 2, a_1 = 4, a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$.

7! Докажите **Теорему Вейерштрасса:** Ограниченная монотонная последовательность сходится.

8. Докажите, что последовательность имеет предел и найдите его:
а) $a_1 = 10, a_n = 5 - \dfrac{4}{a_{n-1}}$; б) $a_1 = 0, a_n = \dfrac{25}{10-a_{n-1}}$; в) $a_1 = \sqrt{2}, a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$.

9*. Докажите, что последовательность $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ имеет предел.

Указание 1. Примените теорему Вейерштрасса.

Указание 2. Докажите, что последовательность $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает.

Предел этой последовательности обозначают e, он равен 2,718281828459045...

Определение. *Последовательность* $\{a_n\}$ *называется фундаментальной, или последовательностью Коши, если* $\forall\ \varepsilon\ \exists\ N : \forall\ m, n > N\ |a_m - a_n| < \varepsilon$.

10. Докажите, что любая фундаментальная последовательность ограничена.

11. Докажите **критерий Коши:**
а) Если последовательность фундаментальна, то она имеет предел.
Указание. Придется использовать аксиому полноты или одно из эквивалентных ей утверждений.
б) Если последовательность имеет предел, то она фундаментальна.

12. Исследуйте на сходимость с помощью критерия Коши:
а) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$. б) $a_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin n}{2^n}$.

13*. Крокодил Гена знает четыре арифметических действия и умеет находить предел. Помогите ему вычислить $\sqrt{a}$.

14*. Теперь помогите ему найти $\sqrt[n]{a}$.

Сдать до 25 сентября.